Жылуэнергетикасындағы сандық әдістер

Лекция 5

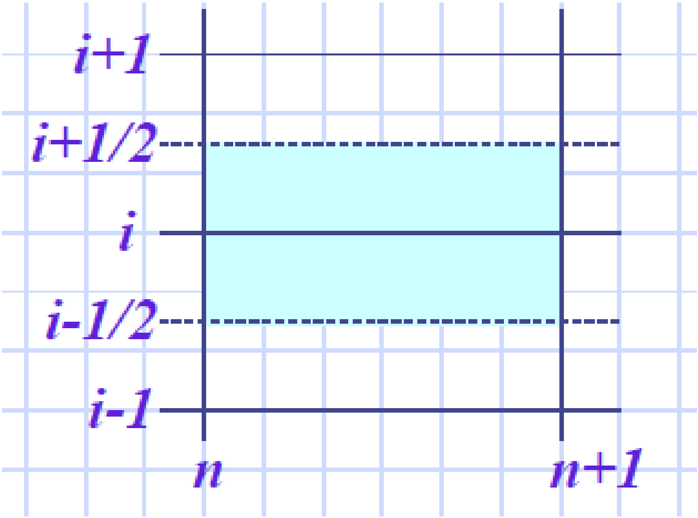
Бақыланған көлем бойынша интегралдау әдісі

Лектор: Оспанова Ш.С., PhD, аға оқытушы

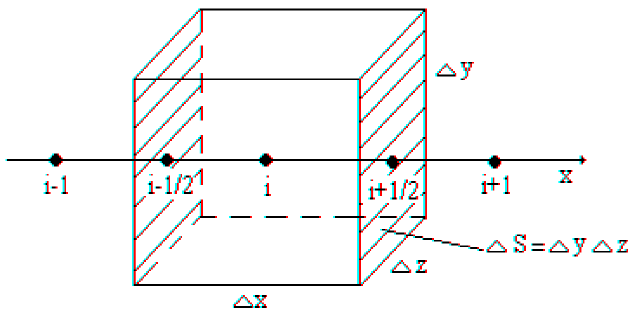
$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ теңдеуін қарастырамыз

Осы теңдеуді шекті-айырымды қатынастар түрінде бейнелеу үшін осы теңдеудің барлық мүшелерін уақыт бойынша

- t_n – нан t_{n+1} –ге дейін (немесе біздің белгілеуімізде n-нен n+1-ге дейін) және
- кеңістік бойынша (координата) $x_{i-1/2}$ – ден $x_{i+1/2}$ –ге дейін интегралдап шығайық.



$$\int_{i-1/2}^{i+1/2}\int_{n}^{n+1}\frac{\partial f}{\partial t}\,dt\,dx+\int_{n}^{n+1}\int_{i-1/2}^{i+1/2}u\,\frac{\partial f}{\partial x}dx\,dt=\int_{n}^{n+1}\int_{i-1/2}^{i+1/2}a\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,dt \qquad (1)$$



Бірінші интегралдаудың нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2}\left(f^{\,n+1}-f^{\,n}\right)dx+u\int_{n}^{n+1}\left(f_{i+1/2}-f_{i-1/2}\right)dt=$$

$$=a\int_{n}^{n+1}\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}-\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1/2}\right)dt \qquad (2)$$

Енді осы жерге «орташа туралы» теореманы пайдаланайық:

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z)dz \approx f(z^*)\Delta z$$

мұндағы $\Delta z = z_{k+1} - z_k, \quad z^* \in [z_k, z_{k+1}]$.

Интегралдарды есептеу барысында координата бойынша орташа нүкте ретінде x_i, ал уақыт бойынша t_n соңғы сол жақтағы нүктені ала отырып мынаны шығарамыз:

$$\left(f_i^{n+1} - f_i^n\right)\Delta x + u\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right)\Delta t =$$

$$= a\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^n - \left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1/2}^n\right)\Delta t \qquad (3)$$

Бұл теңдеудің оң жағындағы туындылар үшін шекті-айырымды қатынастарды мынадай тәсілмен анықтаймыз.

$\dfrac{df}{dx}$ ті x бойынша интегралдаймыз:

$$\int_{i}^{i+1} \left.\frac{df}{dx}\right|^{n} dx = f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n} \qquad (4)$$

Екінші жағынан, егер орташа нүкте ретінде $[x_i, x_{i+1}]$ интервалынан $x_{i+1/2}$ нүктесін алар болсақ, «орташа туралы» теорема бойынша жоғарыдағы интегралдың жуық мәні былайша болады:

$$\int_{i}^{i+1} \left.\frac{df}{dx}\right|^{n} dx \approx \left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n} \Delta x \qquad (5)$$

(4) пен (5) теңдеулерінің оң жақтарын теңестіре отырып, мынаны аламыз:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n} \Delta x \approx f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{i+1/2}^{n} \approx \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n}}{\Delta x} \qquad (6)$$

Дәл осылайша $x_{i\text{-}1/2}$ түйініндегі туынды үшін теңдеуді де алуға болады:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{i-1/2}^{n} \approx \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \qquad (7)$$

$f_{i+1/2}$ мен $f_{i\text{-}1/2}$ мәндерін f шамасының көрші түйіндердегі орташа арифметикалық мәндерімен алмастырамыз:

$$f_{iF1/2} = (f_{iҒ1} + f_i)/2.$$

(6) және (7) өрнектерді (3) теңдеуге қойып, мынаны аламыз:

$$\left(f_i^{n+1} - f_i^n\right)\Delta x + \frac{u}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)\Delta t =$$

$$= a\left(\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} - \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\Delta t \qquad (8)$$

(8) өрнектен барлық теңдеуді *ΔxΔt* көбейткішіне мүшелеп бөліп, түйіндестерін жазсақ, келесі соңғы шекті-айырымды теңдеуді аламыз:

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}$$